7 – Hipergeometrik Dağılım:

Binom dağılımındaki Bernoulli denemeleri örneklemi iadesiz olarak yapılırsa dağılım Hipergeometrik dağılım olur. Herbir denemenin iki sonucu vardır. Hipergeometrik dağılımın Binomdan tek ~~farkı~~ örneklemenin iadesiz yapılmasıdır.

İçerisinde M tane Mavi, geri kalanlar sarı bilye olan toplam N tane bilye olan kutu düşünülsün.

M tane Mavi bilye	N – M tane Sarı bilye

Kutudan iadesiz olarak n tane bilye çekildiğinde, çekilen bilyelerin içinde bulunan Mavi bilyelerin sayısı X t.d. ile gösterilirse X'in dağılımı Hipergeometrik dağılım olur. Olasılık fonksiyonu tanımlanırsa;

N tane bilyeden n tanesinin iadesiz çekimi; $\binom{N}{n}$

M tane Maviden x tane mavi çekimi; $\binom{M}{x}$

N–M taneden n–x tane sarı çekimi; $\binom{N-M}{n-x}$

farklı yollarla yapılabilir:

$p = \frac{M}{N}$ olmak üzere ve X çekilecek mavi bilye sayısı ise $X \sim h(N, n, p)$ ile gösterilir ve olasılık fonksiyonu;

$$p(X=x) = f(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}, & x = 0,1,2,\ldots n \\ 0, & d.h. \end{cases}$$

ile verilir.

M: Özelliğe uyan eleman sayısı
n : Çekilen örnek sayısı,
N : Toplam eleman sayısı,
X : Çekilenler içinde istenen özelliğe uyan eleman sayısı. $p = \frac{M}{N}$, $q = 1 - \frac{M}{N}$

$$E(X) = n \cdot \frac{M}{N} = n \cdot p \quad , \quad V(X) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left[\frac{(N-M) \cdot (N-n)}{N \cdot (N-1)} \right] = n \cdot p \cdot q \cdot \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$$

Örnek : Bir kutuda 3 kusurlu, 7 sağlam parça vardır. İadesiz 3 parça çekiliyor.

a.) 2 kusurlu parça çekilme olasılığı nedir?

b.) Sağlam parça çekilmenin beklenen değeri nedir?

Çözüm : $N = 10$ parça
$n = 3$ çekim
$M = 3$ kusurlu parça
X : Çekilen parçanın kusurlu olma olayı olsun.

a.) $$p(X=2) = \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{7}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{3 \cdot 7}{\frac{10!}{3! \cdot 7!}} = \frac{21}{\frac{4 \cdot 9 \cdot 10}{3 \cdot 2}} = \frac{21}{120} = \frac{7}{40}$$

b.) $E(X) = 3 \cdot \frac{7}{10} = 2{,}1$ Sağlam parça çekilmenin beklenen değeri.

Örnek : Bir deste oyun kağıdından, iadesiz olarak seçilen 6 kağıdın içindeki Vale sayısının dağılımını belirleyip,

a.) Seçilen kağıtlardan 2 tanesinin Vale olma olasılığını hesaplayınız,

b.) Seçilecek 26 kağıt içindeki Vale sayısının beklenen değer ve varyansını bulunuz.

Çözüm: $N = 52$

$n = 6$ ~~kağıt~~ seçiliyor.

$M = 4$ Vale sayısı.

X: Seçilecek 6 kağıt içindeki Vale sayısı olmak üzere,

$$p(X=x) = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$M = a$.

$$= \begin{cases} \dfrac{\binom{4}{x} \cdot \binom{48}{6-x}}{\binom{52}{6}}, & x = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0, & \text{d.h.} \end{cases}$$

a.) 2 kağıdın Vale olması,

$$p(x=2) = f(2) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{4}}{\binom{52}{6}} \cong 0.057$$

b.) $p = \frac{M}{N} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ olmak üzere,

$E(x) = n.p = 26 \cdot \frac{1}{13} = 2 \Rightarrow E(X) = n \cdot \frac{M}{N}$

$q = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$

$V(x) = n.p.q \cdot \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

$= 26 \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{12}{13} \cdot \left(\frac{26}{51}\right) = 0,941$

Teorem: $X \sim h(N, n, p)$ dağılımı için N değeri n den yeterince büyükse (pratikte $\frac{n}{N} < \frac{1}{8}$ ise) X'in dağılımı Binoma yaklaşır.

Yukarıdaki örneğimizde,

$p(X=2) = 0,057$ bulundu.

$n = 6$, $N = 52 \Rightarrow \frac{n}{N} = \frac{6}{52} < \frac{1}{8}$ old. dan binom dağılımıda yeterli sonucu verir.

$\cong 0,11$ $\cong 0,12$

$p = \frac{1}{13}$ olmak üzere, binom dağılımı,

$$p(X=x) = \binom{6}{x}\left(\frac{1}{13}\right)^x \cdot \left(\frac{12}{13}\right)^{6-x}, \quad x = 0,1,2,3,4$$

x: batıstaki valeler sayısı

$x=2$ için

$$p(x=2) = \binom{6}{2}\cdot\left(\frac{1}{13}\right)^2\cdot\left(\frac{12}{13}\right)^4 \cong 0{,}063 \text{ sonucu}$$

hipergeometrik değere oldukça yakın bir sonuçtur.

Örnek: Bir havuzda bulunan 20 balıktan, 8 tanesi yakalanarak işaretlenmiş ve tekrar havuza bırakılmıştır. Daha sonra yakalanan 5 balıktan;

a.) 2 tanesinin işaretli olma olasılığı,

b.) En az 2 tanesinin işaretli olma olasılığını bulunuz. ~~havuzdaki tahmini balık sayısı~~ nedir?

Çözüm: $N=20$ balık
$M=8$ tanesi işaretli
$n=5$ balık çekiliyor.

X: Yakalanan 5 balıktan işaretli olanların sayısı

$$\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad p(X=x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{8}{x}\cdot\binom{12}{5-x}}{\binom{20}{5}}, & x = 0,1,2,3,4,5 \\ 0, & \text{d.h.} \end{cases}$$

a.) $p(x=2) = \dfrac{\binom{8}{2}\cdot\binom{12}{3}}{\binom{20}{5}} \cong 0{,}4$

b.) $p(x \geq 2) = 1 - p(x<2)$
$= 1 - f(0) - f(1)$

$= 1 - 0{,}2043 - 0.2554 = 0.5403$

~~Ödldeki~~

* Tahmini balık sayısı; ~~(N bilinmiyorsa)~~

* $M=100$ işaretli balık olsun
$n=60$ çekilen "
$x=3$ çekilen işaretli balık

$\frac{M}{N} = \frac{x}{n}$ (eşitlik vardır) $\Rightarrow \hat{N} = M\cdot\frac{n}{x}$
$= 100 \times \frac{60}{3}$
$= 2000$ balık